ECOLE POLYTECHNIQUE
CONCOURS 1976

OPTION P'

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4h)

$\mathcal{E}$ est l'espace affine euclidien orienté de dimension trois ; $\mathcal{C}_1 = (O_1, \vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1})$ est un repère orthonormé direct dont les axes sont notés : $\overrightarrow{O_1 x_1}$, $\overrightarrow{O_1 y_1}$, $\overrightarrow{O_1 z_1}$ et on désigne par Π_1 le plan $O_1 x_1 y_1$. L'objet du problème est l'étude de certains mouvements dans $\mathcal{E}$ d'un plan Π (dit plan mobile) par rapport au repère $\mathcal{C}_1$ (considéré comme fixe). Un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes $\overrightarrow{Ox}$ et $\overrightarrow{Oy}$ étant choisi dans Π, on lui associe le repère $\mathcal{C} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé direct de $\mathcal{E}$.

On suppose donnée, dans le plan Π_1, une courbe (C_1) passant par O_1. Cette courbe est orientée et le point O_1 est choisi pour origine des abscisses curvilignes. Le point O décrit cette courbe (C_1), et l'on désigne par $\vec{\tau}$ le vecteur unitaire de la tangente orientée en O à (C_1) et par $\vec{n}$ le vecteur tel que $(O, \vec{\tau}, \vec{n}, \vec{k_1})$ soit un repère orthonormé direct.

Le mouvement du plan Π par rapport à $\mathcal{C}_1$ est défini par les données suivantes :

1°/ Le point O est défini sur (C_1) en fonction du temps t.

2°/ A chaque instant t, l'axe $\overrightarrow{Ox}$ du plan Π coïncide avec la tangente orientée en O à la courbe (C_1) (autrement dit : $\vec{\tau} = \vec{i}$).

3°/ L'angle $\theta = (\vec{n}, \vec{j})$ est défini en fonction du temps t, l'orientation du plan normal en O à (C_1) étant déterminée par $(\vec{j}, \vec{k}) = +\frac{\pi}{2}$.

Enfin (C) désigne le cercle du plan Π, de rayon a ($a > 0$) et de centre A de coordonnées (O, a) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Première Partie

Dans cette partie, on suppose :

1°/ (C_1) est le cercle de rayon a, de centre A_1 de coordonnées $(-a, O, O)$ dans le repère $\mathcal{C}_1$. L'orientation de Π_1 étant déterminée par $(\vec{i_1}, \vec{j_1}) = +\frac{\pi}{2}$, (C_1) est orienté dans le sens direct (c'est-à-dire que $(\vec{i}, \overrightarrow{OA_1}) = +\frac{\pi}{2}$). Le mouvement de O sur (C_1) est déterminé par l'abscisse curviligne de O sur (C_1) : $s(t) = a\,\omega_1\,t$, ω_1 étant une constante vérifiant $\omega_1 > 0$.

2°/ L'angle θ est défini par $\theta(t) = \omega_2\,t$, ω_2 étant une constante vérifiant $\omega_2 \geq 0$.

.../...

Première question :

a) Déterminer la trajectoire du centre A du cercle (C) par ses équations en coordonnées cylindriques dans le repère $(A_1, \vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1})$.

b) On suppose $\omega_1 = \omega_2$; effectuer le tracé de la projection orthogonale de cette trajectoire sur le plan Π_1.

c) Dans la même hypothèse $\omega_1 = \omega_2$, effectuer le tracé de la projection orthogonale de cette trajectoire sur un plan perpendiculaire à $\overrightarrow{O_1 x_1}$.

Deuxième question :

A chaque instant t, on considère la rotation d'axe $\overrightarrow{Ox}$ qui fait correspondre au cercle (C_1) le cercle (C) et on désigne par M l'image du point O_1 par cette rotation.

a) Définir, par des équations paramétriques dans le repère $\mathcal{C}_1$, la trajectoire Γ du point M.

b) Dans l'hypothèse $\omega_1 = \omega_2$, effectuer les tracés des projections orthogonales de Γ sur le plan Π_1 et sur un plan perpendiculaire à $\overrightarrow{O_1 x_1}$.

Troisième question :

Le mouvement d'un solide $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{E}$ est déterminé par les conditions suivantes :

1°/ Le mouvement de $\mathcal{S}$ par rapport à $\mathcal{C}$ est une rotation autour de l'axe de (C).

2°/ A tout instant t, le point M défini dans la deuxième question est la position d'un point fixe de $\mathcal{S}$.

Déterminer le torseur de distribution des vitesses de ce solide $\mathcal{S}$ par rapport au repère $\mathcal{C}_1$.

Deuxième Partie

Les notations et données étant celles du préambule, la courbe (C_1) est paramétrée : les coordonnées x_1 et y_1 de O dans le repère $(O_1, \vec{i_1}, \vec{j_1})$ sont des fonctions continûment dérivables d'un paramètre λ, qui décrit un intervalle ouvert I de R. On suppose que, si s désigne l'abscisse curviligne sur (C_1), $\frac{ds}{d\lambda}$ est strictement positive sur I et que la tangente orientée $\overrightarrow{Ox}$ au point O de la courbe (C_1), de paramètre λ, vérifie :

$$(\overrightarrow{O_1 x_1}, \overrightarrow{Ox}) = \lambda .$$

Le mouvement de O par rapport à $\mathcal{C}_1$ peut alors être défini par la fonction : $t \to \lambda(t)$ et le mouvement de Π par les fonctions : $t \to \lambda(t)$ et $t \to \theta(t)$. Ces fonctions sont supposées continûment dérivables.

Le mouvement d'un solide $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{E}$ est déterminé par les conditions suivantes :

1°/ Le mouvement de $\mathcal{S}$ par rapport à $\mathcal{C}$ est une rotation autour de l'axe de (C).

.../...

2°/ $(A, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ étant un repère orthonormé direct lié à δ et tel que $\vec{K} = \vec{k}$, on pose $\varphi = -(\vec{j}, \vec{J})$, l'orientation du plan Π étant déterminée par $(\vec{i}, \vec{j}) = +\frac{\pi}{2}$, et on se donne la fonction $t \to \varphi(t)$, supposée continûment dérivable.

On posera

$$v = \frac{ds}{dt} , \qquad \delta_1 = \frac{d\lambda}{dt} , \qquad \delta = \frac{d\varphi}{dt} , \qquad \omega_2 = \frac{d\theta}{dt}$$

(on ne fait pas, comme dans la première partie, l'hypothèse que ω_2 soit constant).

Première question :

Déterminer le torseur de distribution des vitesses du solide δ par rapport à $\mathcal{C}_1$. Quel est le vecteur vitesse du point de δ situé en O à l'instant t ? Vérifier que, dans le mouvement du solide δ de la première partie, ce vecteur vitesse est nul.

Deuxième question :

On désigne par μ_1 le point diamétralement opposé à O sur le cercle (C) et on suppose, dans cette question, que le cercle (C) est constamment tangent en μ_1 à une courbe fixe de $\mathfrak{S}$. Montrer alors que l'on a constamment $\omega_2 = 0$.

Troisième question :

On suppose désormais que l'on a constamment $v = a\delta$ et que ω_2 ne s'annule pas. Soit μ un point de (C) dont la vitesse par rapport à δ ne s'annule pas. Montrer que, pour que le cercle (C) soit constamment tangent en μ à une courbe fixe Γ_1 de $\mathfrak{S}$, il faut et il suffit que la vitesse (par rapport à $\mathcal{C}_1$) du point de δ coïncidant à l'instant t avec μ soit constamment nulle.

Quatrième question :

La courbe (C_1) est maintenant définie par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a}{2}(\lambda + \sin\lambda \cos\lambda) \\ y_1 = \frac{a}{2}\sin^2\lambda \end{cases}$$

λ décrivant l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$.

On suppose que $\theta = \omega_2 t$, ω_2 étant ici une constante vérifiant $\omega_2 > 0$, et t décrivant l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2\omega_2}[$, et que le mouvement de O, point de (C_1) de paramètre λ, est défini par $\lambda = \theta = \omega_2 t$. On suppose toujours la condition $v = a\delta$ réalisée.

a) Déterminer le torseur de distribution des vitesses du solide δ par rapport à $\mathcal{C}_1$. Montrer que le cercle (C) reste tangent à une courbe Γ_1 de $\mathfrak{S}$ non située dans Π_1.

b) Donner des équations paramétriques de la courbe Γ_1 dans le repère $\mathcal{C}_1$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail